Investigación Operativa

Resumen

2C-2023 - UTN - FRBA

Curso: **K4152**

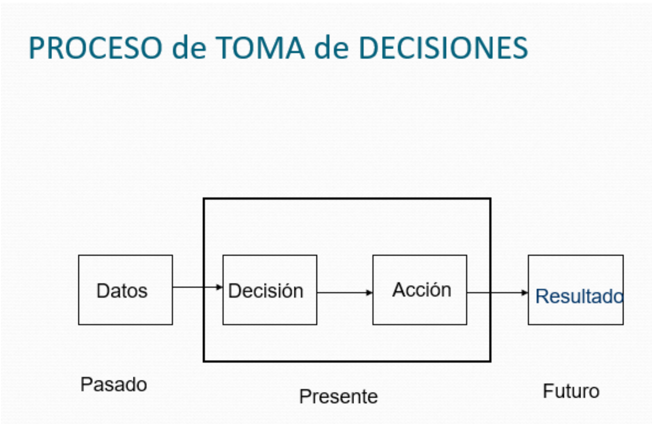
Docente: **Mg. Ing. Ricardo D. Carlevari**

Índice:

Introducción

Clase 1 (15/8)

Resumen de la PPT: basarse en [Resumen de Nacho con notas] (páginas 1 a 3) más los siguientes temas.



Para construir un modelo se necesita:

- experiencia previa
- comprensión del problema. discernimiento de lo esencial.
- conocimiento aportado por el usuario.
- aplicación de metodología adecuada. prueba y error

Metodología

- Definición del problema
    - Interrogantes
    - Objetivo
    - Restricciones
- Modelización
    - Relevamiento del sistema físico
    - Formulación de hipótesis
    - Definición de variables y parámetros
    - Formulación matemática de objetivo y restricciones
- Resolución del modelo

   - Método
      - analítico
      - numérico
   - Análisis de sensibilidad
      - what if?
      - goal seeking
- Implementación
- Informe a dirección, toma de decisión, formulación de políticas.

Programación matemática

- Ver resumen de Nacho, con mis anotaciones.
- Dejé algunos comentarios en la PPT, pero no son necesarios para estudiar salvo que no entienda algo del resumen.
- Agrego

FORMA CANÓNICA DE MAX

NATURAL

$$\text{MAX: } 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &\leq 500 \\ 3 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 &\leq 700 \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &\geq 100 \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 200 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0$$

CANÓNICA

$$\text{MAX: } 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &\leq 500 \\ 3 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 &\leq 700 \\ -2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &\leq -100 \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &\leq 200 \\ -7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &\leq -200 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0$$

Cómo pasar de forma canónica natural a canónica

* Cuando se pasa de igual a menor igual, se generan dos inecuaciones.

Programación lineal

Clase 1B

- Vistos el video y la PPT. Resumido con notas en el resumen de Nacho.

Formas de formulación de un modelo de Programación Lineal

- FORMA NATURAL: Restricciones de ≤,≥,=
- FORMA CANÓNICA:
    - De MAX: todas las restricciones de ≤
    - De MIN: todas las restricciones de ≥
- FORMA ESTÁNDAR: todas las restricciones de =

Si queremos pasar de la Forma Natural a Canónica de MAX, todas las inecuaciones tienen que ser de mayor igual.
Aclaración: si hay una de igualdad se generan 2 inecuaciones, una de menor igual a ese número y otra de menor igual al opuesto de ese número (análogamente con Canónica de MIN). La que queda con el signo opuesto se convierte al mismo signo al multiplicar todo por -1.

Formulaciones

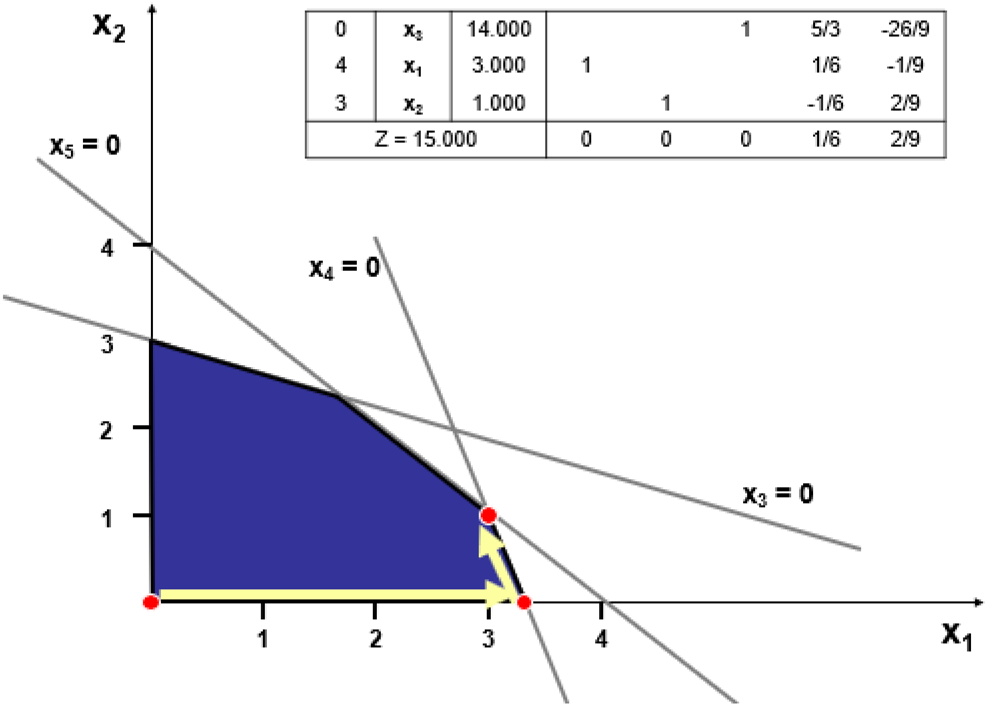
Esta PPT que se ve en la segunda semana es muy útil para pensar la modelización, pero recién se entiende por qué y para qué cuando te estás acercando al parcial.
Recomiendo ver la PPT directamente.

- Primera parte, sirve para aplicar con el método gráfico, que se hace al principio de la materia
- Segunda parte, sirve para problemas complejos de modelización, para más adelante.

Método simplex

El método simplex va recorriendo en cada tabla un vértice del polígono de soluciones posibles, buscando una solución óptima.

0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9
Z = 15.000			0	0	0	1/6	2/9



- Video + PPT. Resumen de la PPT: basarse en [Resumen de Nacho con notas] (páginas 12 en adelante) más los siguientes temas.
- Ejercicios hiper detallados: [ejercicio resuelto con detalle por mi].
    - Estándar: ejercicio de menor igual
    - Caso particular: mayor igual
        - Se agrega una variable artificial M * mu_x para cada restricción de mayor igual.
        - La tabla inicial del simplex NUNCA tiene las vars reales en las filas. Tiene las slacks y las artificiales. La slack que corresponde a la fila de la artificial no se pone en las primeras columnas, sino que se pone la artificial, y se marca como restando la slack en las columnas aij.

    - Caso particular: igual
        - Se agrega otra variable artificial

Tener cuidado con:

- Cálculo de zj-cj.
    - Cómo se calcula.
    - Cuál se elige para que entre a la tabla: el de mayor valor absoluto, negativo si se maximiza, positivo si se minimiza.

    - Se para cuando no hay más valores negativos si se maximiza, positivos si se minimiza.
- Cálculo de tita: no se contemplan titas negativos ni infinitos, en ambos casos se pone rayita. Se elige el menor tita positivo.
- Calculo de regla de pivote. Revisar varias veces los números!

Casos especiales:

+ Mayor igual
+ Igual

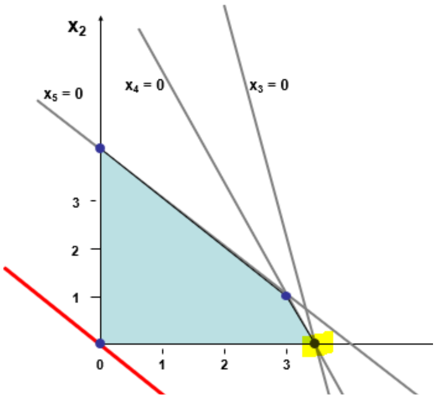
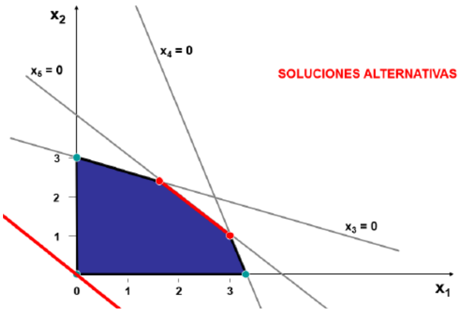
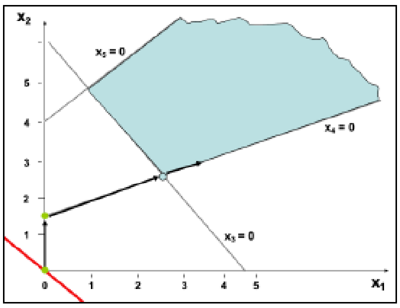
Tipos de soluciones

CUADRO COMPARATIVO

<table>
<tr><th></th><th>Gráfico</th><th>Simplex</th></tr>
<tr><td>Básica factible</td><td>Resultan de la intersección de dos rectas de restricciones, por ende, dos de las variables slack van a ser 0</td><td>Es aquella para la cual existe un número de variables iguales a 0 (cero), por lo menos igual al número de grados de libertad del sistema (Grado de libertad = N° de incógnitas – N° de ecuaciones).</td></tr>
<tr><td>Degenerada
Hay más variables iguales a 0, que grados de libertad.</td><td>Se intersectan màs rectas que grados de libertad (incluyendo ejes x1 y x2)

La solución degenerada del ejemplo no es una solución óptima:</td><td>Después de un empate de titas, una o más variables básicas (las que estàn en las filas de la tabla), van a ser iguales a 0.
<table>
<tr><td></td><td></td><td>c_j</td><td>3</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>c_k</td><td>x_k</td><td>B</td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>A_3</td><td>A_4</td><td>A_5</td></tr>
<tr><td>42.000</td><td>y_2</td><td>0</td><td>-5/3</td><td>1</td><td></td><td>-1/6</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>36.000</td><td>y_3</td><td>3/9</td><td>26/9</td><td></td><td>1</td><td>1/9</td><td>-2/9</td></tr>
<tr><td colspan="3">Z = 12.000</td><td>-14.000</td><td>0</td><td>0</td><td>-3.000</td><td>-1.000</td></tr>
</table>
DEGENERADA

Importante: NO contestar que es por un empate de titas. Eso sucede antes de llegar a la solución</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>degenerada, pero no es determinante.</td>
</tr>
<tr>
<td>Alternativa
Existen todo una recta de soluciones óptimas</td>
<td>La recta del funcional coincide con uno de los lados del polígono y todos los puntos intermedios son soluciones óptimas no básicas

</td>
<td>Existe un zj-cj de las variables que no están en la tabla que tiene valor 0, al que vamos a llamar 0*. (Ojo: el valor de los zj-cj de las variables que sí están en la tabla SIEMPRE es 0.)
<table>
<tr><td>0</td><td>x_4</td><td>8.400</td><td></td><td></td><td>3/5</td><td>1</td><td>-26/15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_1</td><td>1.600</td><td>1</td><td></td><td>-1/10</td><td></td><td>16/90</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_2</td><td>2.400</td><td></td><td>1</td><td>1/10</td><td></td><td>-1/15</td></tr>
<tr><td colspan="3">Z = 12.000</td><td>0</td><td>0</td><td>0*</td><td>0</td><td>1/3</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>Polìgono abierto (Falta una restricción)</td>
<td>Queda un polígono abierto, que no me permite dar una solución

</td>
<td>No tiene solución. Lo primero que hay que mirar es si se alcanzó una solución óptima (o sea, no quedan zj-cj negativos en una MAX, o viceversa).
De ser el caso:
Todos los bi/aij = infinito o negativo (bij negativo). Por ende, no obtenemos tita.
<table>
<tr><td></td><td></td><td>c_j</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>c_k</td><td>x_k</td><td>B</td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>A_3</td><td>A_4</td><td>A_5</td><td>b_i/a_{ij}</td></tr>
<tr><td>4</td><td>x_1</td><td>2.666,67</td><td>1</td><td></td><td>-0,0758</td><td>0,0606</td><td></td><td>---</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x_2</td><td>2.666,67</td><td></td><td>1</td><td>-0,0303</td><td>-0,0758</td><td></td><td>---</td></tr>
<tr><td>0</td><td>x_5</td><td>36.000</td><td></td><td></td><td>-0,4091</td><td>1,2327</td><td>1</td><td>---</td></tr>
<tr><td colspan="3">Z = 18.666,67</td><td>0</td><td>0</td><td>-0,3939</td><td>0,0152</td><td>0</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Incompatible	No existe ningún punto que satisfaga todas las restricciones	No tiene solución. Lo primero que hay que mirar es si se alcanzó una solución óptima (o sea, no quedan zj-cj negativos en una MAX, o viceversa). Llegamos a una tabla que no se puede mejorar más (no puedo elegir cuál columna hacer entrar), pero que no es la óptima (siguen apareciendo una o más variables artificiales en la base).

Factible

Cumple simultáneamente con las condiciones de vinculo (o restricciones) y con las condiciones de no negatividad de las variables.
Gráficamente, es cualquier punto que se encuentra dentro del polígono de soluciones posibles, incluyendo sus bordes y vértices.

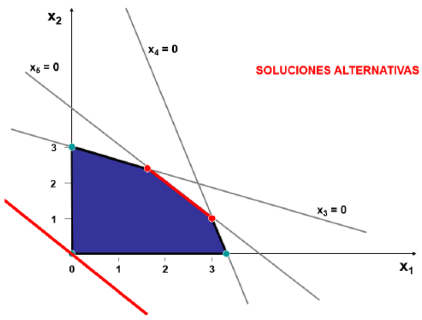
Básica

Es aquella para la cual existe un número de variables iguales a 0 (cero), **por lo menos** igual al número de grados de libertad del sistema (Grado de libertad = N° de incógnitas – N° de ecuaciones).
(Esto incluye en el "por lo menos" el caso de la solución degenerada)

Resultan de la intersección de dos rectas de restricciones, por ende, dos de las variables slack van a ser 0.(ej. 1.3).

Básica Factible

Cumple con la doble condición de ser básica y factible.



Soluciones alternativas (con solución)

No hay un único punto óptimo, sino toda una recta.

Gráficamente: la recta del funcional coincide con uno de los lados del polígono y todos los puntos intermedios son soluciones óptimas no básicas

En el simplex: hay un zj-cj de las variables que no están en la tabla que tiene valor 0, al que vamos a llamar 0*. (Ojo: el valor de los zj-cj de las variables que sí están en la tabla SIEMPRE es 0.)
Este 0* se vuelve a meter en la tabla del simplex para solucionar una segunda solución alternativa.

Solución: las dos soluciones obtenidas se ponen en una combinación lineal

		c_j	3	3	0	0	0	
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9	8.400
3	x_1	3.000	1			1/6	-1/9	18.000
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9	---
Z = 12.000			0	0	0	0*	3/9	
0	x_4	8.400			3/5	1	-26/15	
3	x_1	1.600	1		-1/10		16/90	
3	x_2	2.400		1	1/10		-1/15	
Z = 12.000			0	0	0*	0	1/3	

A todas estas soluciones se los pone en una combinación lineal de la siguiente manera:

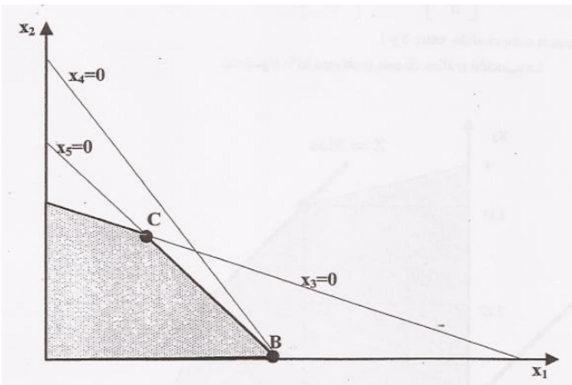
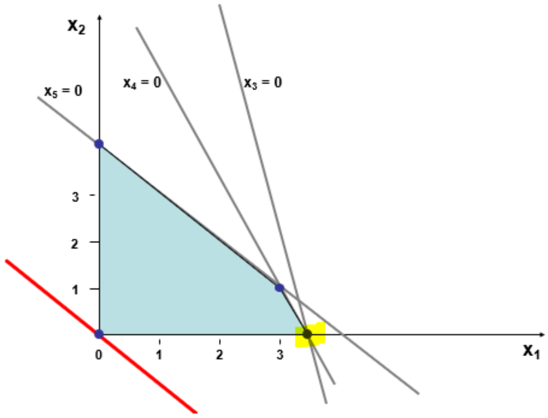
$$X = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3.000 \\ 1.000 \\ 14.000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1.600 \\ 2.400 \\ 0 \\ 8.400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con 0 <= alfa <= 1

Solución degenerada (con solución)

Hay más variables iguales a 0, que grados de libertad.

Gráficamente, por un mismo vértice pasan un número de **rectas** SUPERIOR a los grados de libertad del sistema. (El número de rectas puede incluir las rectas x1 = 0 y x2 = 0)

	
En el gráfico, el punto B es una solución factible degenerada: x1 = x4 = x5 = 0 (con dos grados de libertad: 5 incógnitas, 3 ecuaciones)	Este es el gráfico correspondiente al problema de ejemplo.

En el **Simplex, se reconoce porque** después de un empate de titas, **una o más variables básicas van a ser iguales a 0.** Antes: se da cuando a la hora de elegir los θ para sacar una variable de la base, hay 2 θ iguales (en el mínimo) y por ende hay más de una variable candidata a salir de la tabla.

Cómo se resuelve: Si elegimos un θ cualquiera, podríamos entrar en un loop. Por eso se dividen todos los números de cada fila por el número que sería el pivote si sacáramos esa fila. Se comparan los resultados de izquierda a derecha: en cuanto hay una diferencia en los valores entre las dos filas, se elige la que tiene el menor valor (de manera absoluta) .

		c_j	4	3	0	0	0	
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	35.000	10	4	1			3.500
0	x_4	42.000	12	6		1		3.500
0	x_5	36.000	9	9			1	4.000
Z = 0			-4	-3	0	0	0	

- PIVOTE: 10 y 12, respectivamente.
  - 10/10 = 12/12
  - 4/10 < 6/12 → elijo la primera fila para sacar (entra x1, y sale x3)
  - En la siguiente iteración va a haber una o más variables con tita = 0

La base degenerada es esta: x1=3500, x5=4500, **x4=x2=x3=0**

		c_j	4	3	0	0	0	
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
4	x_1	3.500	1	0,4	0,1			8.750
0	x_4	0		1,2	-1,2	1		0
0	x_5	4.500		5,4	-0,9		1	833,33
Z = 14.000			0	-1,4	0,4	0	0	

Lo que distingue a la solución degenerada es que hay una o más variables básicas iguales a 0, como nos muestra esta última tabla.

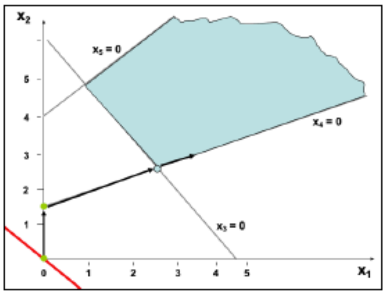
Otro ejemplo:

		c_j	3	3	0	0	0
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
42.000	y_2	0	-5/3	1		-1/6	1/6
36.000	y_3	3/9	26/9		1	1/9	-2/9
Z = 12.000			-14.000	0	0	-3.000	-1.000

DEGENERADA

Polígono abierto (sin solución)

Gráficamente: en una maximización, me queda un polígono abierto. No hay una solución acotada, falta una restricción.
En el simplex: en la iteración, no obtenemos ningún tita (o da infinito, o el bij es negativo).



c_k	x_k	c_j / B	4 / A_1	3 / A_2	0 / A_3	0 / A_4	0 / A_5	b_i/a_{ij}
4	x_1	2.666,67	1		-0,0758	0,0606		---
3	x_2	2.666,67		1	-0,0303	-0,0758		---
0	x_5	36.000			-0,4091	1,2327	1	---
Z = 18.666,67			0	0	-0,3939	0,0152	0	

La respuesta a un ejercicio de polígono abierto es: "No hay solución" + justificación.

Solución Incompatible (sin solución)

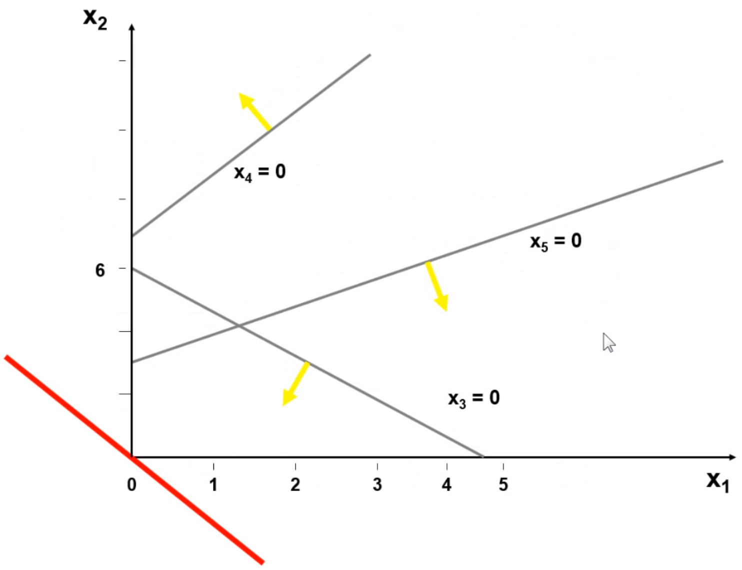
Gráficamente: no existe ningún punto que satisfaga todas las restricciones
Simplex: Llegamos a una tabla que no se puede mejorar más (no puedo elegir cuál columna hacer entrar), pero que no es la óptima (siguen apareciendo una o más variables artificiales en la base).

En esta maximización:

3a. TABLA

c_k	x_k	c_j / B	4 / A_1	3 / A_2	A_3	A_4	A_5	- M / $A_{\mu 1}$	- M / $A_{\mu 2}$
4	x_1	888,89	1		-0,0556		-0,0494	0,0556	
-M	μ_2	23.333,33			-0,3333	-1	-0,9630	0,3333	1
3	x_2	4890		1	-0,0556		0,0617	0,0556	
Z =-23.333,33M + 18.222,22			0	0	-0,3889 + 0,333 M	M	-0,0123 + 0,968 M	0,3889 + 0,6667 M	0

TODOS LOS z_j-c_j POSITIVOS



La respuesta a un ejercicio de así es: "No hay solución" + justificación.

Interpretación

Valor marginal (de una restricción!) = El valor marginal es la medida de la mejora que puede experimentar el funcional por cada unidad que se relaje (aumentar en un <=, disminuir en un >=) la correspondiente restricción.
Costo de oportunidad (de var real) = Es el deterioro que experimentaría el funcional por cada unidad adicional que se haga de un elemento, por encima de lo que conviene hacer.

En la tabla directa, maximizamos beneficio. En la dual, minimizamos costo. Por ende:
En el dual, el zj (de las variables asociadas a restricciones en la tabla directa) representa el COSTO marginal. Es decir: cuánto varía mi costo si se relaja una restricción (en vez de cuánto varía mi beneficio en el directo)

TABLA ÓPTIMA DIRECTA

		$c_j \rightarrow$	Coeficientes de eficiencia					
c_k =cj	x_k	B RHS / Término independiente	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
			Vars reales		Vars slack			

		Valores óptimos para las xk de la tabla. **Siempre positivos.** Si la var es real, es el óptimo, si es slack, es sobrante o excedente. Lo que no está en la base = 0	**Valor * (-1)** = cuánto se modifica la variable xk si se produce uno de los elementos reales Ai Vect id = es parte de la base (costo de op = 0 xq produce todo lo que se puede) !Vect id = no es parte de la base. Cuánto afecta a las demás vars la producción de esto.	**Vect identidad =** de este recurso sobró (cuánto: está en B)	**No vect id** = recurso agotado. Los números nos dicen cuánto se modificaría cada xk si se aumenta en 1 el recurso en cuestión. (SIN CAMBIAR SIGNO)	
Z= Valor del funcional optimizado		zj-cj →	**Costo de oportunidad** del producto. Si se produce una unidad de un producto, por encima de lo recomendado, el funcional disminuye en esto (en MAX). Es lo mín que debería aportar el producto para que convenga producirlo	**Valor marginal** del recurso / restricción Si es 0, es que la restricción no afecta Si != 0, es que agregar 1 de ese recurso le sumaría este valor al funcional PRECIO MAX que pagaría por este recurso. Precio min de venta del recurso.		

Matriz inversa

Es la matriz que aparece en la tabla óptima, en el lugar que en la base inicial aparecía la matriz identidad.

La matriz inversa nos permite transformar cualquier columna/vector de la tabla inicial a la tabla óptima.

Para cualquier columna de la base inicial, se cumple:
Matriz Inversa * Matriz de columna de la base = Matriz de la misma columna en tabla óptima.
(El orden de los factores sí altera el producto)

Si hay un -1 en la matriz identidad original, toda la columna correspondiente en la matriz inversa se multiplica por -1

BASE

		c_j	4	3	0	0	0
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	48.000	6	16	1		
0	x_4	42.000	12	6		1	
0	x_5	36.000	9	9			1
Z = 0			- 4	- 3	0	0	0

ÓPTIMA

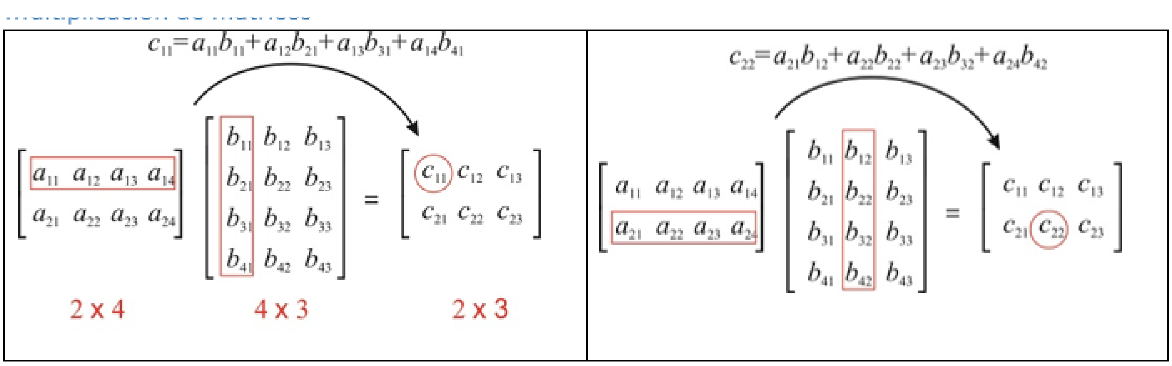
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9
Z = 15.000			0	0	0	1/6	2/9

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/3 & -26/9 \\ & 1/6 & -1/9 \\ & -1/6 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & -26/9 \\ & 1/6 & -1/9 \\ & -1/6 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48.000 \\ 42.000 \\ 36.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 3.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Utilidad:

- Utilizar la matriz inversa para completar columnas de una base óptima incompleta.
- Utilizar la matriz inversa para confirmar los cálculos, haciéndolos sobre una de las columnas óptimas que es 001 o algo así.

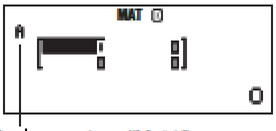
Multiplicación de matrices:



Se puede hacer en la calculadora científica fx991ES.

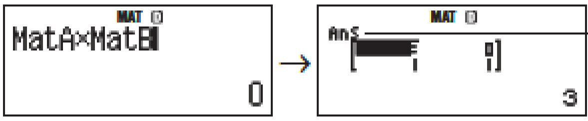
1 Asignar $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ MatA y $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ MatB y luego realizar los siguientes cálculos: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (MatA×MatB), $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (MatA+MatB)

1. Presione [MODE] [6] (MATRIX) para ingresar al modo MATRIX.
2. Presione [1] (MatA) [5] (2×2).
   - Se mostrará el editor de matrices para ingresar los elementos de la matriz de 2 × 2 que especificó como MatA.



"A" representa a "MatA".

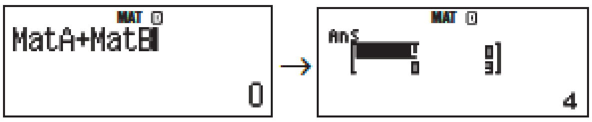
3. Ingreso de los elementos de MatA: 2 [=] 1 [=] 1 [=] 1 [=].
4. Realice la siguiente operación de teclas: [SHIFT] [4] (MATRIX) [2] (Data) [2] (MatB) [5] (2×2).
   - Se mostrará el editor de matrices para ingresar los elementos de la matriz de 2 × 2 que especificó como MatB.
5. Ingreso de los elementos de MatB: 2 [=] [(−)] 1 [=] [(−)] 1 [=] 2 [=].
6. Presione [AC] para avanzar a la pantalla de cálculos y ejecute el primero (MatA×MatB): [SHIFT] [4] (MATRIX) [3] (MatA) [×] [SHIFT] [4] (MATRIX) [4] (MatB) [=].
   - Se verá la pantalla MatAns con los resultados.



"Ans" representa a "MatAns".

Nota: "MatAns" representa a "Memoria de respuesta de matrices". Vea "Memoria de respuesta de matrices" para más información.

7. Realice el cálculo siguiente (MatA+MatB): [AC] [SHIFT] [4] (MATRIX) [3] (MatA) [+] [SHIFT] [4] (MATRIX) [4] (MatB) [=].



Si se tiene alguna columna ya calculada (por ejemplo, una columna que se sabe es el vector identidad), se puede probar el cálculo y la corrección de la matriz antes de empezar.

1. MODE: Matrix
2. Configurar la primer matriz = MatA. Ingresar dato por dato, poniendo = entre medio.
3. Shift 4 (Matrix) - 2: Data.
4. Configurar la segunda matriz. El formato de la matriz es filasXcolumnas.
5. Para pasar a calcular: AC
6. Shift Matrix - elegir matriz
7. operación
8. Shift matrix elegir matriz
9. =

Matriz A (otra matriz inversa)

La inversa de la matriz identidad de la tabla óptima, es la matriz que aparece en ese mismo lugar en la matriz tabla base. Se llama Matriz A.
Importante: hay que reordenar las columnas para que quede con diagonal de 1s la optima, y lo mismo se hace con la original.

		c_j	4	3	0
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3
0	x_3	48.000	6	16	1
0	x_4	42.000	12	6	
0	x_5	36.000	9	9	
Z = 0			- 4	- 3	0
0	x_3	14.000			1
4	x_1	3.000	1		
3	x_2	1.000		1	
Z = 15.000			0	0	0

Ya reordenada, la matriz A va a ser:

1	6	16
0	12	6
0	9	9

No tiene mucha utilidad

Interpretación de tabla óptima

Tabla óptima de problema de estampado, soldado y pintado

c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	14.000			**1**	**5/3**	**-26/9**
4	x_1	3.000	1			**1/6**	**-1/9**
3	x_2	1.000		1		**-1/6**	**2/9**
Z = 15.000			0	0	**0**	**1/6**	**2/9**

Conocemos:

- Z. Valor del funcional optimizado (i.e. ganancia)
- Valores de las variables que están en la base. Producimos 3000 x1, 1000 x2 y nos sobran 14000 del primer recurso (x3 - estampado o soldado).
- Los valores de las variables que no están en la base: x4 = x5 = 0. Esos recursos fueron agotados, no hay sobrantes.

Vectores asociados a las variables slack:

- **zj - cj** asociados a las variables slack (0, 1/6, 2/9): representan el **valor marginal** del recurso estampado, soldado y pintado. Se miden en $/unidad de recurso.
- Vector A4 (soldado): Como el soldado es un recurso saturado, el no disponer más cantidad de ese recurso nos impide fabricar más unidades de A o B. Si tuviéramos una unidad más podríamos producir más unidades e incrementar el funcional.
    - zj-cj: El funcional se incrementa: 1/6 $/seg soldado.
    - Resto de los aij:
        - El sobrante x3 aumenta 5/3 por cada seg adicinoal de soldado
        - El producto a, aumenta 1/6 por cada seg adicional de soldado.
        - El producto b disminuye 1/6 por cada seg adicional de soldado.
- Vector A3 (estampado): el valor marginal es 0 porque hay sobrante de ese recurso. Sólo aumenta el sobrante.

Vectores asociados a las variables reales

c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	27.000		13	1	-1/2	
6	x_1	3.500	1	1/2		1/12	
0	x_5	4.500		1/2		-3/4	1
Z = 21.000			0	1	0	1/2	0

- Se interpretan con el signo cambiado.
- zj-cj: costo de oportunidad (aka. costos reducidos).
- aij: cuánto varía cada una de las variables si se produce un producto más de los recomendados.

Vector A2: En este caso no conviene producir el producto B (no quedó dentro de la base). Si lo produzco igual, tiene un costo.

- El funcional **disminuye** $1 por cada producto b que produzca en contra de la recomendación óptima.
- El sobrante de x3 **disminuye** 13 por cada unidad de producto B.
- El sobrante de pintado disminuye 0.5.
- La cantidad de productos A creados, disminuye ½.

Vector A1:

- No tiene costo de oportunidad, estoy produciendo todo lo que puedo. No esto perdiendo una oportunidad.

Valor marginal

- El valor marginal es la medida de la mejora que puede experimentar el funcional por cada unidad que se relaje la correspondiente restricción.
    - Relajar: hacerla menos restrictiva.
        - Restricción de <=: incrementar una unidad el término independiente
        - Restricción de >= disminuir una unidad el término independiente
    - Valor:
        - >0: relajar la restricción aumenta el funcional.

        - =0. Sobran unidades de ese recurso, por ende, relajar la restricción sólo hará que sobre más. Entonces su valor marginal = 0.
    - Representa:
        - Precio máximo que uno está dispuesto a pagar por una unidad de ese recurso
        - Precio mínimo al que uno tiene que vender una unidad de ese recurso
    - Gráficamente:
        - La recta de la restricción se corre, y si el valor > 0, también se modifica el funcional.
- Variaciones:
    - Si tuviéramos un seg más de soldado, aumenta en 1/6 el funcional. Si disminuye un seg de soldado, disminuye 1/6 el funcional.
    - Si tuviéramos muchos segundos más o menos, no necesariamente se cumple esto.

Formulación Dual

Formulación directa	**Formulación dual**
A B EST) $\boxed{6}\, x_1 + 16\, x_2 \leq 48000$ SOL) $\boxed{12}\, x_1 + 6\, x_2 \leq 42000$ PIN) $\boxed{9}\, x_1 + 9\, x_2 \leq 36000$ $Z = \boxed{4}\, x_1 + 3\, x_2 \Rightarrow \text{Máx}$ $x_1 \ , \ x_2 \geq 0$	EST SOL PIN A) $\boxed{6\, y_1 + 12\, y_2 + 9\, y_3 \geq 4}$ B) $16\, y_1 + 6\, y_2 + 9\, y_3 \geq 3$ $Z = 48.000\, y_1 + 42.000\, y_2 + 36.000\, y_3 \Rightarrow \text{Mín}$ $y_i \geq 0$
Las 3 restricciones están dispuestas en filas y A y B son las variables reales dispuestas en columnas. Además, el término independiente está del lado derecho, tenemos un funcional, y las condiciones de no negatividad.	Todo es al revés que en la form. directa: las filas se transforman en columnas y viceversa. Si en el directo, las restricciones eran de <=, pasan a ser >=, y viceversa. Los términos independientes del directo pasan a ser los coeficientes del funcional del dual y los coeficientes del directo pasan a ser los términos independientes del dual. Si el objetivo en el directo es maximizar, ene l dual será minimizar y viceversa.

	Formulación directa	**Formulación dual**
Variables	Xi	Yi
Restricciones	Filas	Columnas
Variables reales	Columnas	Filas
Término independiente	Términos independientes RH	Coeficientes del funcional
Coeficientes del funcional		Términos independientes RH
Objetivo funcional	Maximizar	Minimizar
	Minimizar	Maximizar

Restricciones	>=	<=
	<=	>=
Condiciones de no negatividad	SIEMPRE	SIEMPRE

Tanto la formulación directa como la dual se resuelven con un simplex de la misma manera.

Transformación de directo a dual

Hay diferentes formas de pasar de la formulación directa a la dual:

- Simétrica → A través de la forma canónica. Es la que vamos a usar.
- Asimétrica → A través de la forma estándar (con slacks).

DUAL SIMÉTRICO

DIRECTO	DUAL
$A \cdot X \leq B$ $X \geq 0$ $Z = C \cdot X \rightarrow$ Máx	$A^T \cdot Y \geq C$ $Y \geq 0$ $Z = B \cdot Y \rightarrow$ Mín
$A \cdot X \geq B$ $X \geq 0$ $Z = C \cdot X \rightarrow$ Mín	$A^T \cdot Y \leq C$ $Y \geq 0$ $Z = B \cdot Y \rightarrow$ Máx

DUAL ASIMÉTRICO

DIRECTO	DUAL
$A \cdot X = B$ $X \geq 0$ $Z = C \cdot X \rightarrow$ Máx	$A^T \cdot Y \geq C$ $Z = B \cdot Y \rightarrow$ Mín
$A \cdot X = B$ $X \geq 0$ $Z = C \cdot X \rightarrow$ Mín	$A^T \cdot Y \leq C$ $Z = B \cdot Y \rightarrow$ Máx

Transformación simétrica:

1. Se parte de la forma natural, sin slacks aún.
2. Pasamos a forma canónica, con **todas las restricciones de menor igual.**
    a. Si había una restricción >= en la directa, la paso a <= multiplicando todo por -1 (esto da vuelta el signo).
    b. Si había una restricción de =, se la reemplaza por dos restricciones iguales: una >= y otra <=. Después se multiplica por -1 la de mayor igual.
3. Invertimos todo.
    a. De columna a fila.
    b. De menor igual a mayor igual.
    c. Cambiamos objetivo de funcional

DIRECTO
FORMA
CANÓNICA

$$\text{MAX: } Z = 4\,x_1 + 3\,x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 16\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 \leq 480 \\ -4\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 \leq -100 \\ 10\,x_1 + 8\,x_2 - 3\,x_3 \leq 500 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

$$\text{MIN: } Z = 480\,y_1 - 100\,y_2 + 500\,y_3$$

$$\begin{cases} 16\,y_1 - 4\,y_2 + 10\,y_3 \geq 4 \\ 6\,y_1 - 5\,y_2 + 8\,y_3 \geq 3 \\ 2\,y_1 + 7\,y_2 - 3\,y_3 \geq -1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

Ej - pasar a forma canónica una restricción = :

4 x1 + 5 x2 – 7 x3 = 100 → 4 x1 + 5 x2 – 7 x3 **>=** 100 → **-4 x1 - 5 x2 + 7 x3 <= -100**

4 x1 + 5 x2 – 7 x3 **<=** 100 → 4 x1 + 5 x2 – 7 x3 <= 100

Utilidad:

- Convertir >= en <=

Pasar de tabla óptima directa de simplex a dual

- Obtengo el nuevo funcional a partir del enunciado original. En este caso va a ser MIN Z = 48000 y1 + 42000 y2 + 36000 y3.
- Armo tabla. Siempre tenemos la misma cantidad de variables totales (slack + reales).
    - Directa: **n variables reales** + **m restricciones/slacks**
        - Tabla: n+m columnas / **m filas**

- Dual: m variables reales + n slacks
  - Tabla: n+m columnas / **n filas**
- El valor del funcional va a ser el mismo en ambas tablas óptimas. Z = 15000 en este caso.
- Detecto las variables correspondientes a cada columna. Las pongo debajo de sus columnas en las dos tablas.
  - Variables reales del directo (x1 y x2), con su correspondiente costo de oportunidad (zj-cj) → Estas van a ser las variables slack del dual (y4 y y5)
  - Variables slacks del directo (x3 a x5), con su correspondiente valor marginal (zj-cj) → Estas van a ser las variables reales de la tabla dual (y1 a y3)
  - La primera variable slack del directo, va a ser la primera variable real del dual.
- **Elijo las variables básicas del dual.** Son las que NO estaban entre las básicas del directo (es decir: las que corresponden a x4 y x5 que no tenían sobrante y no estaban en la tabla)
  - Cj (primera columna): los tomo del funcional del dual
  - B: los tomo del zj-cj de esas variables en la tabla directa.
    - El valor B siempre tiene que ser positivo. (Si paso de MIN a MAX, tengo que invertirlos)
- Completo el interior de la tabla
  - Para las variables básicas del dual, pongo matriz identidad, con zj-cj = 0
  - Variables no artificiales: se ubican en su correspondiente lugar del dual, con el signo invertido.
  -
  - Variables artificiales: se ubican en su correspondiente lugar del dual. (Esto no va a pasar en ejercicios de parcial)
    - De MAX a MIN: signo invertido
    - De MIN a MAX: signo igual
  - OJO con el orden de las variables/filas. Se recomienda poner las coordenadas abajo (como en el ejemplo en azul. Siempre se empieza con las slack de la otra tabla, después las reales)
- Completo los zj-cj del dual:
  - si es MINIMIZACION, tienen que ser negativos.
  - Si es maximización, tienen que ser positivos (probablemente no se inviertan en absoluto)

			Vars reales		Slacks de las restricciones		
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9
Z = 15.000			0	0	0	1/6	2/9
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

Del funcional dual

Las variables vinculadas a las x que NO estaban en la base del directo (x4 y x5)

42.000	y_2	1/6	-5/3	1		-1/6	1/6
36.000	y_3	2/9	26/9		1	1/9	-2/9
Z = 15.000			-14.000	0	0	-3.000	-1.000
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

Importante: existe un **vínculo** entre las variables del directo y del dual. Que exista un vínculo no implica que sean iguales. x3 y y1 están vinculadas, pero representan cosas diferentes y se miden en unidades diferentes.

Teorema fundamental de la dualidad

Solución DIRECTO	Solución DUAL
Directa finita	Directa finita Zopt_dir = Zopt_dual
Degenerada	Alternativas
Incompatible	Polígono abierto

Interpretación económica de la tabla dual

En la formulación directa, busco MAXIMIZAR beneficio. En la dual, busco MINIMIZAR costo.

Lo comparamos con el precio unitario del producto.

	EST	SOL	PIN		
A)	$6\ y_1 +$	$12\ y_2 +$	$9\ y_3$	$\geq$	4

Y1 es el valor marginal del estampado [$/seg estampado].
6 es el coeficiente tecnológico [Seg de estampado /unidad de producto A]
Y1 * 6 = [$/unidad de A]

La suma de los 3 términos es el zj del producto. El zj es el **costo marginal** (no valor) del producto. Es la valorización de los recursos que uso.
El valor marginal es el precio mínimo al que estoy dispuesto a vender una unidad de recurso.
Comparo:

- Suma de los 3 términos (el monto mínimo de $ que recibo si vendo esos recursos)
- Con beneficio unitario del producto ($ que recibo por vender el producto).

Si:

- Beneficio unitario producto > costo marginal. Me conviene fabricar el producto (es mayor el cj > zj).
- Else: me conviene vender el recurso

Cuando activamos el zj-cj negativo, activamos la variable donde el beneficio unitario (cj) es mayor que el costo marginal (zj)

Análisis de sensibilidad

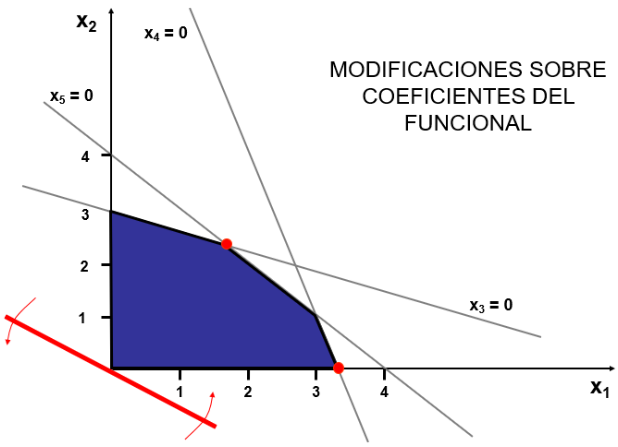
Análisis que se realiza **sobre la solución óptima obtenida**. Permite poder plantear preguntas del tipo "qué pasa si" y responderlas mediante un estudio de sensibilidad.

Vamos a ver 6 casos de análisis de sensibilidad:

- Modificaciones de coeficientes de eficiencia (cj): coeficientes del funcional (sobre la tabla óptima del directo)
- Modificaciones sobre términos independientes o RHS (bi) (sobre la tabla óptima del dual)
- Agregado de nuevos productos (sobre la tabla óptima del directo)

- Agregado de nuevas restricciones: nunca va a ser conveniente agregarla, pero a lo mejor es necesaria, en este caso la pregunta sería: "esta restricción nueva modifica la solución óptima que tenemos ahora?" (sobre la tabla óptima del dual)
- Rangos de validez de la solución óptima directa
- Rangos de validez de la solución óptima dual

Modificaciones sobre los coeficientes del funcional (ck/cj)



Gráficamente, cambia la pendiente del funcional, y por ende podría cambiar la solución óptima, ya sea por otra, o convertirse en un problema con soluciones alternativas.

En el simplex: Sobre la tabla óptima del DIRECTO, modifico los coeficientes. En base a eso, vuelvo a calcular los zj-cj.

1. Modificar los coeficientes
2. Volver a calcular los zj-cj.
3. **Si uno de los zj-cj cambia de signo de modo que indique que hay que iterar, es que cambia la solución óptima**. (Si aparece un zj-cj negativo en una maximización, o uno positivo en una minimización).
4. Si cambia la solución óptima: se itera sobre la tabla óptima con los zj-cj cambiados.

MAX: $Z = 4\,x_1 + \overset{6}{\cancel{3}}\,x_2$

$$\begin{aligned} 6\,x_1 + 16\,x_2 &\leq 48000 \\ 12\,x_1 + 6\,x_2 &\leq 42000 \\ 9\,x_1 + 9\,x_2 &\leq 36000 \end{aligned}$$

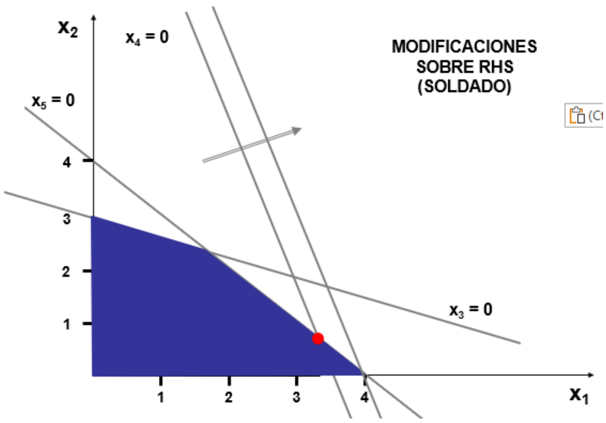
		c_j	4	6 $\cancel{3}$	0	0	0
c_k	x_k	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9
6 $\cancel{3}$	x_2	1.000		1		-1/6	2/9
		Z = 15.000	0	0	0	1/6	2/9
		Z = 18.000	0	0	0	-1/3	8/9

1. Recalculo los zj-cj con el nuevo coeficiente

		c_j	4	6	0	0	0
c_k	x_k	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_4	8.400			3/5	1	-26/15
4	x_1	1.600	1		-1/10		8/45
6	x_2	2.400		1	1/10		-1/15
		Z = 18.400	0	0	1/5	0	14/15

2. Itero porque surgió un zj-cj negativo en un problema de maximización.

Modificaciones sobre término independiente (RHS o Bi)



Gráficamente, se desplaza una de las rectas de las restricciones. Puede cambiar la solución óptima.

En el simplex: Se trabaja sobre la tabla óptima del **DUAL**, ya que los RHS del directo están como coeficientes del funcional acá.

1. Modificar los coeficientes
2. Volver a calcular los zj-cj.
3. Si uno de los zj-cj cambia de signo de modo que indique que hay que iterar, es que cambia la solución óptima. (Si aparece un zj-cj negativo en una maximización, o uno positivo en una minimización).

MAX: $Z = 4\,x_1 + 3\,x_2$

$$6\,x_1 + 16\,x_2 \le 48.000$$
$$12\,x_1 + 6\,x_2 \le \cancel{42.000}\ \ 54000$$
$$9\,x_1 + 9\,x_2 \le 36.000$$

→

MIN: $Z = 48.000\,y_1 + \cancel{42.000}\,y_2 + 36.000\,y_3$ (54.000)

$$6\,y_1 + 12\,y_2 + 9\,y_3 \ge 4$$
$$16\,y_1 + 6\,y_2 + 9\,y_3 \ge 3$$

		c_j	48.000	~~42.000~~ 54.000	36.000	0	0
c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5
~~42.000~~ 54.000 ←	y_2	1/6	-5/3	1		-1/6	1/6
36.000	y_3	2/9	26/9		1	1/9	-2/9
Z = 15.000			-14.000	0	0	-3.000	-1.000
Z = 17.000			-34.000	0	0	-5.000	1.000 ↑

1. Recalculo los zj-cj con el nuevo coeficiente

		c_j	48.000	~~42.000~~ 54.000	36.000	0	0
c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5
0	y_5	1	-10	6		-1	1
36.000	y_3	4/9	2/3	4/3	1	-1/9	
Z = 16.000			-24.000	-6.000	0	-4.000	0

2. Itero porque surgió un zj-cj negativo en un problema de maximización.

Agregado de una nueva actividad

Qué se busca responder: Vale la pena producir x producto nuevo? Cuál es la nueva solución óptima?

MAX: $Z = 4\,x_1 + 3\,x_2 + 7{,}5\,x_6$

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 16\,x_2 + 23\,x_6 \le 48.000 \\ 12\,x_1 + 6\,x_2 + 18\,x_6 \le 42.000 \\ 9\,x_1 + 9\,x_2 + 18\,x_6 \le 36.000 \end{cases}$$

SOLUCIÓN ÓPTIMA ANTERIOR: $y_1 = 0 \quad y_2 = 1/6 \quad y_3 = 2/9$

$23 \cdot y_1 + 18 \cdot y_2 + 18 \cdot y_3 = 23 \cdot 0 + 18 \cdot 1/6 + 18 \cdot 2/9 = 7 < 7{,}5$

Pasos:

1. **Chequeo si la nueva actividad vale la pena. Para eso, uso el valor marginal de cada uno de los recursos que uso (los yi óptimos de la tabla dual, o bien los zj-cj de la tabla**

optima para las slacks) y los multiplico por la cantidad de recursos que se usa en la producción de la nueva actividad. Como el valor marginal de los recursos sumados es menor al valor del nuevo producto, vale más la pena usar los recursos para producir que venderlos. (Sin este paso, no está del todo bien resuelto el ejercicio)

2. Agrego la nueva actividad a la tabla inicial del directo.
3. En base a la matriz inversa (la que está en la tabla óptima debajo de la matriz identidad de la tabla original) que surge de la tabla óptima del directo original, calculo la columna correspondiente a la nueva variable. (Matriz inversa * columna inicial = columna optima)
4. Calculo el zj-cj de esa columna en la tabla óptima.
5. Si el zj-cj implica que necesito volver a iterar, es que afecta. Itero hasta terminar la solución.

		c_j	4	3	0	0	0	7,5
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	48.000	6	16	1			23
0	x_4	42.000	12	6		1		18
0	x_5	36.000	9	9			1	18
Z = 0			- 4	- 3	0	0	0	
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9	
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9	
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9	
Z = 15.000			0	0	0	1/6	2/9	

Paso 1. Tablas directas. Inicial y óptima.

En la óptima, en amarillo está la matriz inversa que se usa para obtener la columna óptima del producto x6.

Paso 2. Multiplico matriz inversa por columna de nuevo producto

$$\begin{vmatrix} 1 & 5/3 & -26/9 \\ & 1/6 & -1/9 \\ & -1/6 & 2/9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 23 \\ 18 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

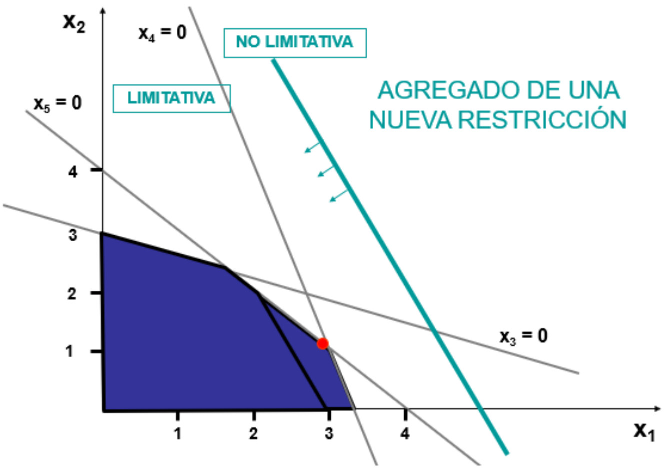
Paso 3. Con la nueva columna, calculo el zj-cj. El zj-cj es negativo en un problema de maximización. Es decir: cambia el óptimo.

0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9	1
4	x_1	3.000	1			1/6	-1/9	1
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9	1
Z = 15.000			0	0	0	1/6	2/9	-0,5

Paso 4. Itero para obtener el nuevo óptimo

		c_j	4	3	0	0	0	7,5
c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	13.000		-1	1	11/6	-28/4	
4	x_1	2.000	1	-1		1/3	-1/3	
7,5	x_6	1.000		1		-1/6	2/9	1
Z = 15.500			0	1/2	0	1/12	1/3	0

Agregado de una nueva restricción



Gráficamente, se agrega otra recta de restricción. Puede ser limitativa o no.

Antes de empezar: puedo ver si la solución óptima cumple o no esa restricción, reemplazando las variables con sus respectivos valores óptimos en la restricción.

MAX: $Z = 4x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 6x_1 + 16x_2 \leq 48.000 \\ 12x_1 + 6x_2 \leq 42.000 \\ 9x_1 + 9x_2 \leq 36.000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6.000 \end{cases}$$

SOLUCIÓN ÓPTIMA ANTERIOR: $x_1 = 3.000 \quad x_2 = 1.000$

$2 \cdot x_1 + x_2 = 2 \cdot 3.000 + 1.000 = 7.000 \nleq 6.000$

En el simplex. Trabajo sobre las tablas del dual.

1. En la tabla inicial del dual, incorporo la nueva restricción (una variable con su cj, y su columna)
2. Completo la tabla óptima del dual: multiplico la matriz inversa de la óptima dual original por la columna nueva. OJO: Al estar en la tabla dual, la matriz identidad está negativa, y tengo que invertir los signos para obtener la matriz inversa.
3. Calculo el zj-cj de la columna nueva.
4. Si el zj-cj de la columna nueva me lleva a volver a iterar, lo hago y obtengo un nuevo óptimo. Si no, no afectaba. OJO: si el problema original era de maximización, en el dual voy a estar frente a un problema de minimización, y un coeficiente positivo va a ser indicador de que tengo que volver a iterar.

Pasos 1 y 2. Ojo con la matriz inversa!

		c_j	48.000	42.000	36.000	0	0	6.000
c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6
0	y_4	4	6	12	9	-1		2
0	y_5	3	16	6	9		-1	1

c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6
42.000	y_2	1/6	-5/3	1		-1/6	1/6	
36.000	y_3	2/9	26/9		1	1/9	-2/9	
Z = 15.000			-14.000	0	0	-3.000	-1.000	

Paso 3. Matriz inversa del dual!

$$\begin{vmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/9 & 2/9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/6 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Paso 4.

c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6
42.000	y_2	1/6	-5/3	1		-1/6	1/6	1/6
36.000	y_3	2/9	26/9		1	1/9	-2/9	0
Z = 15.000			-14.000	0	0	-3.000	-1.000	1.000

Paso 5. Itero:

		c_j	48.000	42.000	36.000	0	0	6.000
c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6
6.000	y_6	1	-10	6		-1	1	1
36.000	y_3	2/9	25/9		1	1/9	-2/9	
Z = 14.000			-4.000	-6.000	0	-2.000	-2000	0

Rangos de validez de la solución óptima directa (ck)

Buscamos encontrar un límite superior e inferior dentro de los cuales puede variar el coeficiente del funcional (ck) sin que se altere la estructura de la solución óptima.

Se realiza sobre: tabla óptima del directo

Se detecta cuando: aparecen soluciones alternativas (0* en los zj-cj). Esos son los límites superiores e inferiores de ck.

Así se calculan los límites superiores e inferiores:

	$c_{iSUP} = c_j + \frac{z_j - c_j}{\lvert a_{ij} \rvert}$	$b_{2\,INF} = c_j - \left\lvert \frac{z_j - c_j}{a_{ij}} \right\rvert_{MIN}$
MAXIMIZACION	aij = **| aij negativo |** en la fila del ck zj-cj: el | zj-cj | correspondiente a la columna de ese aij	aij = **| aij positivo |** en la fila del ck zj-cj: el | zj-cj | correspondiente a la columna de ese aij
MINIMIZACION	aij = **| aij positivo |** en la fila del ck zj-cj: el | zj-cj | correspondiente a la columna de ese aij	aij = **| aij negativo |** en la fila del ck zj-cj: el | zj-cj | correspondiente a la columna de ese aij **Si hay más de 1 aij negativo, hago el cociente |(zj-cj)/aij| para ambos, y elijo el menor de los dos. (Esto aplica a todos los casos donde haya más de uno para elegir. siempre el mínimo cociente absoluto)**

Significado:

- El rango es: ciINF **<=** ci **<=** ciSUP
- Si ci = ciINF o ci = ciSUP → hay soluciones alternativas
- Los valores óptimos B no van a variar.
- El Z va a variar, porque cambia el ck por el que se multiplican los B.

Ejemplo:

RANGO DE c_1

c_k	x_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	14.000			1	5/3	-26/9
6 $\cancel{4}$	x_1	3.000	1			1/6	$\boxed{-1/9}$
3	x_2	1.000		1		-1/6	2/9
Z = 15.000 (Máx)			0	0	0	1/6	2/9
Z = 16.000 (Máx)			0	0	0	1/2	0*

$$c_{1\,SUP} = 4 + \frac{2/9}{1/9} = 6 \qquad c_{1\,INF} = 4 - \frac{1/6}{1/6} = 3$$

Chequeo: cuando calculo los zj-cj con los nuevos rangos, aparece un 0*

Rangos de validez de la solución óptima dual

Evalúo los coeficientes ck del dual, que es el equivalente al RHS del directo.

Resolución:

- Si el ck está dentro de la base, resuelvo como antes.

a_{ij}	MAX	MIN
SUP.	-	+
INF.	+	-

-
- Si el ck está **fuera de la base:**

	ci SUP	ci INF
MAXIMIZACION	cj + (zj-cj) Con el zj-cj correspondiente a esa columna.	-infinito
MINIMIZACION	infinito	cj - (zj-cj) Con el zj-cj de esa columna

Ejemplo:

RANGO DE b_1 (EST)

		c_j	34.000 ~~48.000~~	42.000	36.000	0	0
c'_k	y_k	B'	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5
42.000	y_2	1/6	-5/3	1		-1/6	1/6
36.000	y_3	2/9	26/9		1	1/9	-2/9
Z = 15.000 (Mín)			-14.000	0	0	-3.000	-1.000
Z = 15.000 (Mín)			0*	0	0	-3.000	-1.000

$b_{1\ SUP} = \infty$

$b_{1\ INF} = 48.000 - 14.000 = 34.000$

$c_{j\ LIM}$	MAX	MIN
SUP.	$c_j + (z_j - c_j)$	∞
INF.	$-\infty$	$c_j - (z_j - c_j)$

Chequeo: cuando calculo los zj-cj con los nuevos rangos, aparece un 0*

LINDO

Sintaxis:

- ORDEN:
  - Se empieza con el funcional. Se pone MAX/MIN mas la función. En una única línea.
  - ST (Subject to) se pone después del funcional, antes de las restricciones
  - Se ponen todas las restricciones, nombrándolas con ALGO) restricción
  - END
  - Después de END se pueden poner cuestiones de tipo de variable. Si no se pone nada, se las asume continuas.
    - GIN [nombre de variable] o GIN [cantidad de variables] → variables enteras
    - INT [nombre de variable] o INT[cantidad de variables] → variables binarias
- Detalles:
  - No se puede usar paréntesis en las cuentas
  - Las variables empiezan con una letra, pueden tener hasta 8 caracteres.

  - Se usa el punto decimal.
  - > y < Lindo los interpreta como >= y <=
  - No es case sensitive
-

Análisis básico - Interpretación

```
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)      15000.00

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      X1      3000.000000          0.000000
      X2      1000.000000          0.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    EST)    14000.000000          0.000000
    SOL)        0.000000          0.166667
    PIN)        0.000000          0.222222

NO. ITERATIONS=       2
```

Optimum found at step / Number of iterations: cantidad de tablas de simplex que hay que hacer para llegar a la solución, además de la inicial. (Es decir: inicial + 2 tablas en el ejemplo).
Objective function value. Valor del funcional optimizado. En el ejemplo: Z = 15000
Análisis de variables:

- Value: valor óptimo de cada variable
- Reduced cost: costo de oportunidad. Es el deterioro que experimentaría el funcional por cada unidad adicional que se haga de un elemento, por encima de lo que conviene hacer

Análisis de restricciones:

- Slack or surplus: valor de la variable slack de cada restricción. Nos indica si sobra o falta.
- Dual prices:

Análisis de sensibilidad - interpretación

Programación entera - [Pendiente]

Programación binaria

- Por convención, se llaman I_j
- Valores posibles: 0 y 1
- Sirven para:
  - Activar/desactivar variables → Xi - M * Ii <= 0 (
  - Activar/desactivar restricciones

Casos:

	Enunciado	Formulación
Costo fijo	El prod 1 tiene costo fijo de 5000, y costo variable de 10. Cantidad máxima del prod: 1000. Minimizar costo	X1 - 1000 I1 <= 0 → Si I1 = 0, X1 = 0 MIN Z = 5000 I1 + 10 X1
Lote mínimo	Si fabrico A, tengo que producir por lo menos 100 unidades	Xa - 100 IA >= 0
Exclusión de alternativas	En una torre de destilación de capacidad de 1000 m3, sólo se puede procesar uno de los crudos A B o C por día.	IA + Ib + Ic <= 1 (podría no procesar ninguno) Xa - 1000 Ia <= 0 (máximo 1000) Xb - 1000 Ib <= 0 Xc - 1000 Ic <= 0
Inclusión de alternativas	Con una torre de destilación de 1000m3 de capacidad, se tienen que procesar al menos 200 m3 de dos tipos de crudo diferente	Xa + Xb + Xc <= 1000 Ia + Ib + Ic >= 2 Xa - 1000 Ia <= 0 (idem Xb y Xc) Xa - 200 Ia >= 0 (idem b y c)

Combinaciones

A => B	Ia - Ib <= 0 o Ib - Ia >= 0	11 ~~10~~ 01 00
A ⇔ B	Ib - Ia = 0	11 ~~10~~ ~~01~~ 00
!(A y B)	Ia + Ib <= 1 (don't overthink it)	~~11~~ 10 01 00
Si A y/o B => al menos una de C, D, E	I - Ic - Id - Ie = 0 Ia + Ib - 2I <= 0	

-

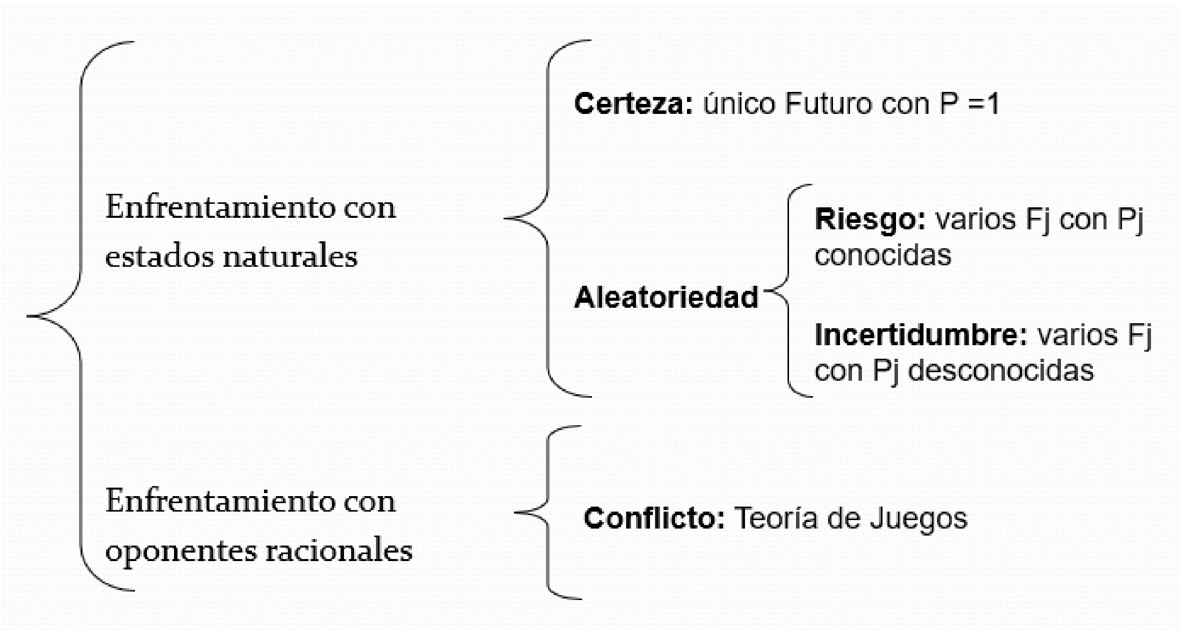
Ejercicios que vale la pena repasar:

- Restricciones de mayor igual. Ver "Agregado de una nueva restricción" como ejercicio y desarrollarlo completo.

Teoría de la decisión

Post-parcial

Tipos de problemas



En IO vemos Enfrentamiento con estados naturales:

- Certeza. Ya se sabe qué va a pasar, y qué consecuencias tiene sobre mis decisiones.
- Aleatoriedad:
    - Riesgo: Se pondera el resultado de cada decisión en cada futuro posible, por la probabilidad de ocurrencia de ese futuro.
    - Incertidumbre: Se conoce los futuros posibles, pero no su probabilidad de ocurrencia.
        - Métodos:
            - Descarto las opciones que son dominadas por otras (es decir, que en todos los escenarios posibles, la decisión es mejor que la otra).
            - Uso varios **criterios de evaluación:**
                - Criterio optimista (maximax): para el futuro más positivo, elijo la mejor opción.
                - Pesimista (minimax): para el futuro menos positivo, elijo la mejor opción.
                - De Hurwicz: Se define un coeficiente de optimismo a. Para cada estrategia posible, se pondera (a por mejor outcome + (1-a) por peor outcome).

- De Savage/matriz de los lamentos: Se calcula el costo de oportunidad (cuánto pierdo en cada una si me toca la opción menos útil de cada futuro posible). Para cada estrategia, se toma el máximo costo de oportunidad. De entre los máximos, me quedo con la estrategia que tiene el menor costo de oportunidad.
- Laplace/racionalidad: Asume que la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los n futuros es 1/n (son equiprobables), y lo convierte en un problema de decisión en condiciones de riesgo.

Administración de proyectos

Proyecto: Conjunto de actividades (o tareas) interrelacionadas que deben desarrollarse para alcanzar un fin determinado.

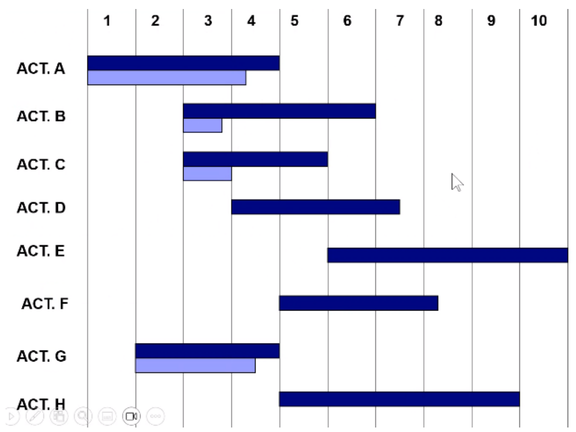
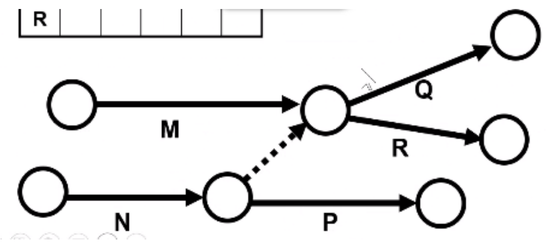
Administración de proyectos. Etapas :

- Planificación:
    - Se divide el proyecto en actividades
    - Se determina la secuencia de desarrollo entre ellas
    - Se estima el tiempo de ejecución de cada una
        - Por experiencia en lo mismo, o en algo similar
        - Por determinación del proveedor
        - Criteriosamente
    - Se estima los recursos necesarios (insumos, personal, espacio)
    - Se determina la duración del proyecto
- Programación
    - Evidenciar el tiempo de comienzo y finalización de cada tarea (calendarizar)
    - Programar los recursos (cuándo necesitamos cada cosa)
    - Determinar el cash flow (cuándo hay que pagar y cuánto)
- Control
    - Verificar que lo realizado esté en concordancia con lo planificado y/o programado
    - Iniciar actividades correctivas

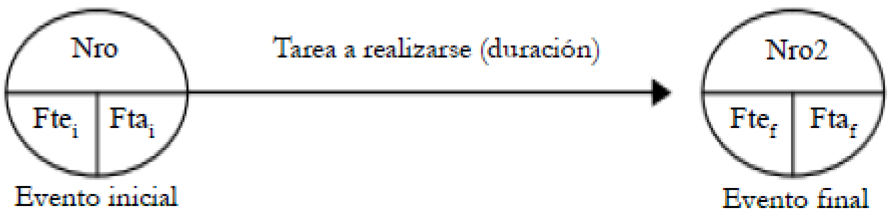
Métodos

- Diagrama de Gantt (barras)
- Camino crítico: (redes)
    - CPM: Critical Path Method (Método del camino crítico)
    - PERT: Project Evaluation and Review Technique (Técnica de revisión y evaluación de proyectos)

Los métodos de camino crítico se diferencian en el modo en que se estiman los tiempos. El CPM es determinístico, y el PERT es probabilístico (toma 3 estimativos: más probable, optimista y pesimista, y los pondera)

	
Gantt Azul oscuro: lo proyectado. Celeste: lo realizado.	**Camino crítico / PERT**

Graficar:



Cada tarea tiene una duración.
Cada evento tiene:

- Nro: número que identifica al nodo.
- Fte_i: fecha temprana del nodo inicio. Primera posibilidad de inicio de una tarea (y la primera posibilidad de finalización de la tarea anterior)
- Fta_i: fecha tardía del nodo inicio. Última posibilidad de inicio de la tarea sin atrasar la duración del proyecto.
- Fte_f: fecha temprana del nodo fin: primera posibilidad de finalización de la tarea
- Fta_f: fecha tardía del nodo fin: última posibilidad de finalización de la tarea sin atrasar el proyecto

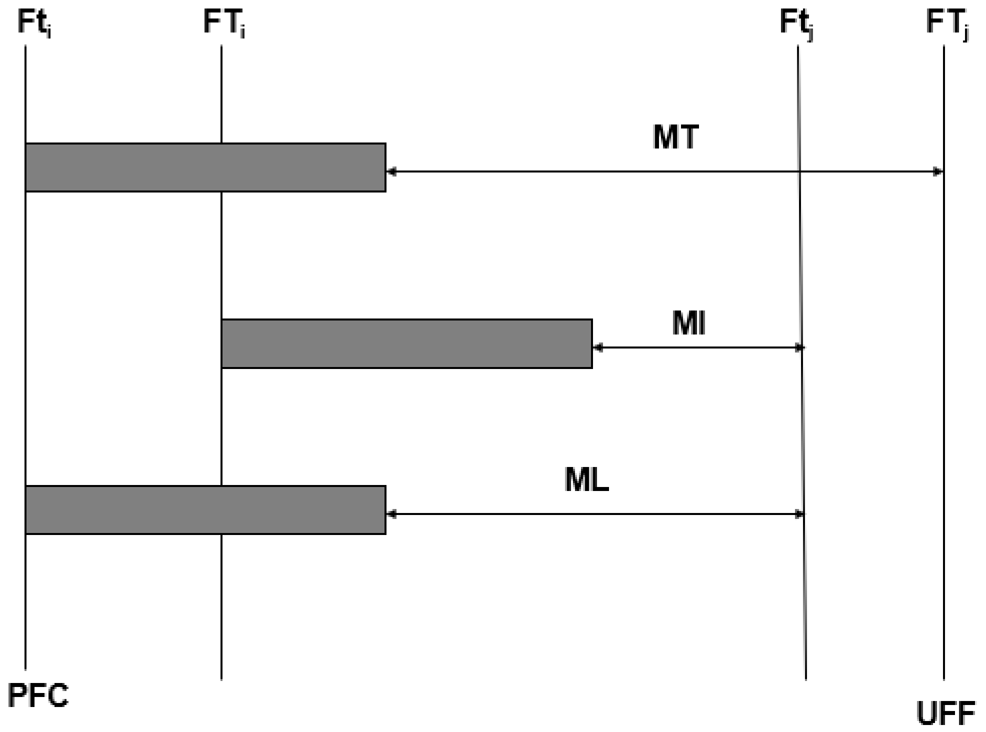
Camino crítico:

- Es la cadena de tareas sucesivas que une los nodos inicial y final del proyecto, cuya suma de tiempos de duración es máxima
- Cualquier atraso en alguna de las tareas del camino crítico producirá un atraso equivalente en la duración total del proyecto
- Gráficamente:
  - Sucesos críticos: son los nodos donde la fecha temprana y tardía de finalización son iguales. Acá el margen del suceso (tardía menos temprana) es 0.
  - Actividades críticas: van entre sucesos críticos (pero puede haber actividades no críticas entre dos sucesos críticos!).
  - Puede haber más de un camino crítico!

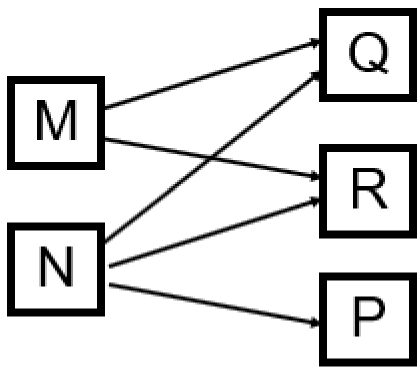
Márgenes:

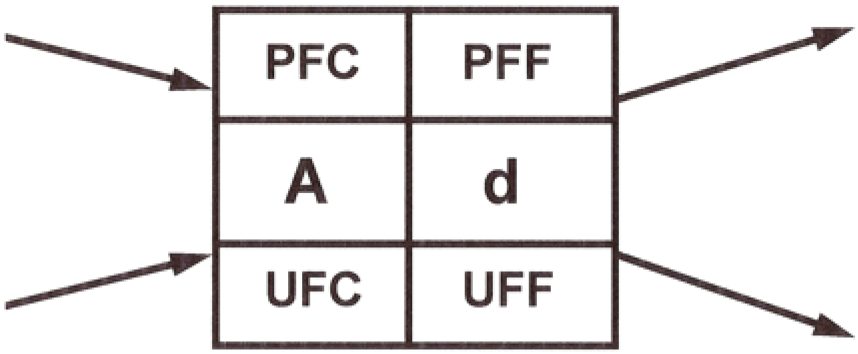
- **Margen de un suceso (nodo): fecha tardía - fecha temprana. Margen 0 → el nodo es parte del camino crítico**
- Margen total de una actividad: fecha tardía de finalización del suceso final - (fecha temprana de inicio + duración). Es el margen de tiempo que puede retrasarse la tarea sin comprometer la duración total del proyecto. → compromete hacia adelante

- Margen libre de una actividad: fecha temprana de finalización - (fecha temprana de inicio + duración). Tiempo que puede demorarse la ejecución de una tarea sin afectar el comienzo de la siguiente en su fecha temprana. → compromete hacia adelante
- Margen independiente: Fecha temprana de finalización - fecha tardía de inicio - duración. → compromete hacia adelante y hacia atrás. Margen que tiene una tarea que empieza en su fecha tardía, para no comprometer la fecha temprana de las próximas.



Método nodo-actividad
Cada nodo es una actividad





PFC: Primera fecha de comienzo

PFF: Primera fecha de finalización

UFC: Última fecha de comienzo

UFF: Última fecha de finalización.

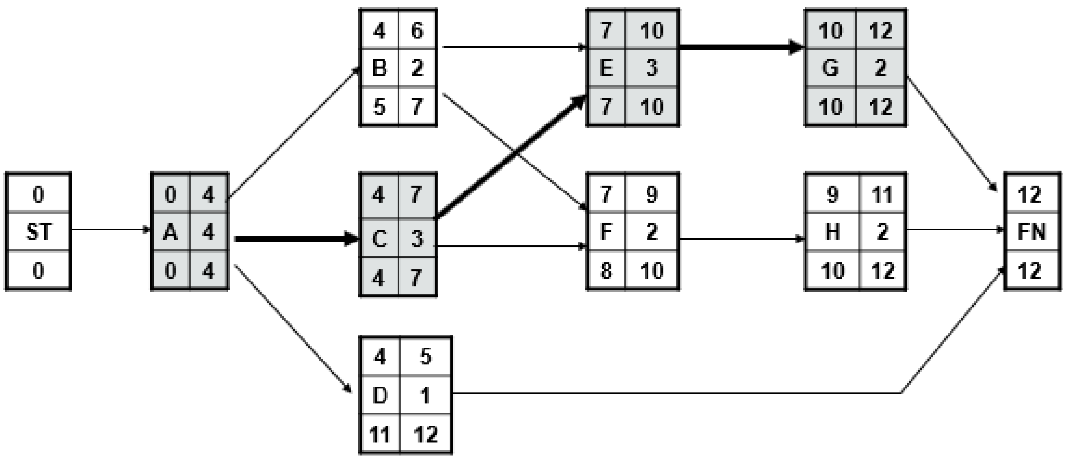
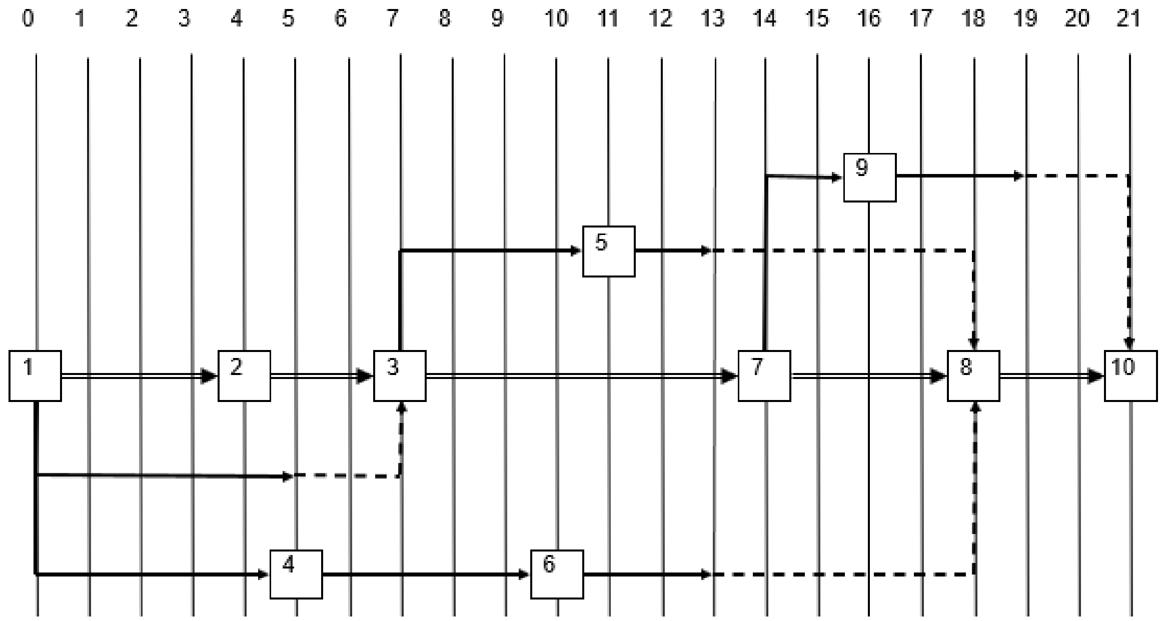


Diagrama calendario

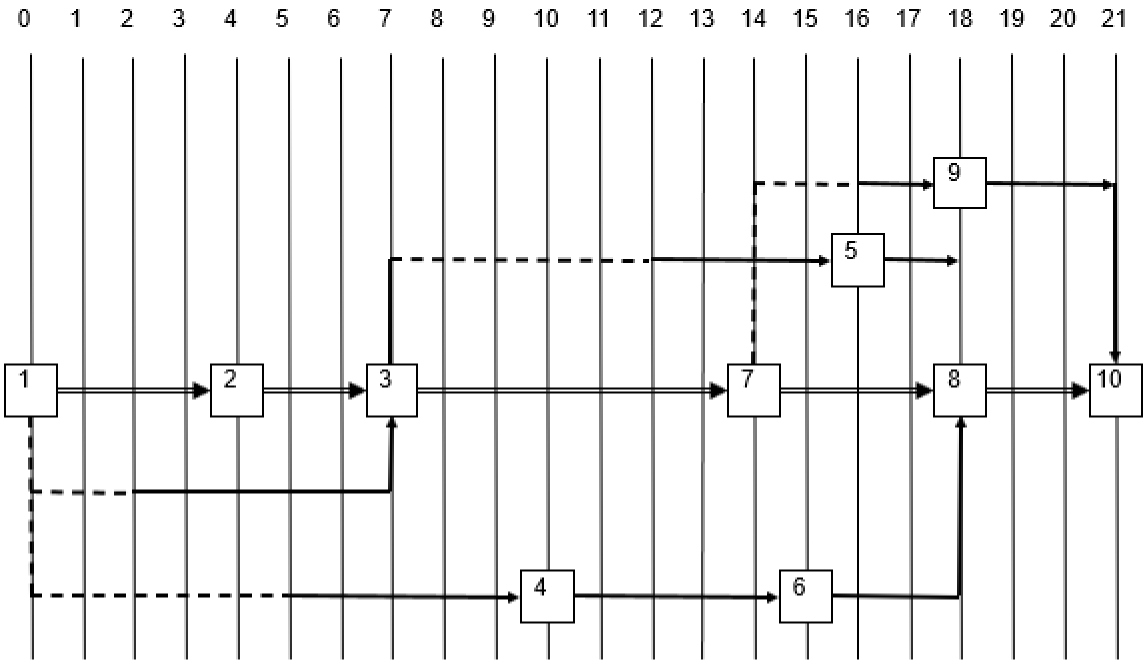
Pone las tareas sobre un calendario, con flechas que muestran su duración. El tiempo de margen, se representa con línea punteada.

A fecha temprana



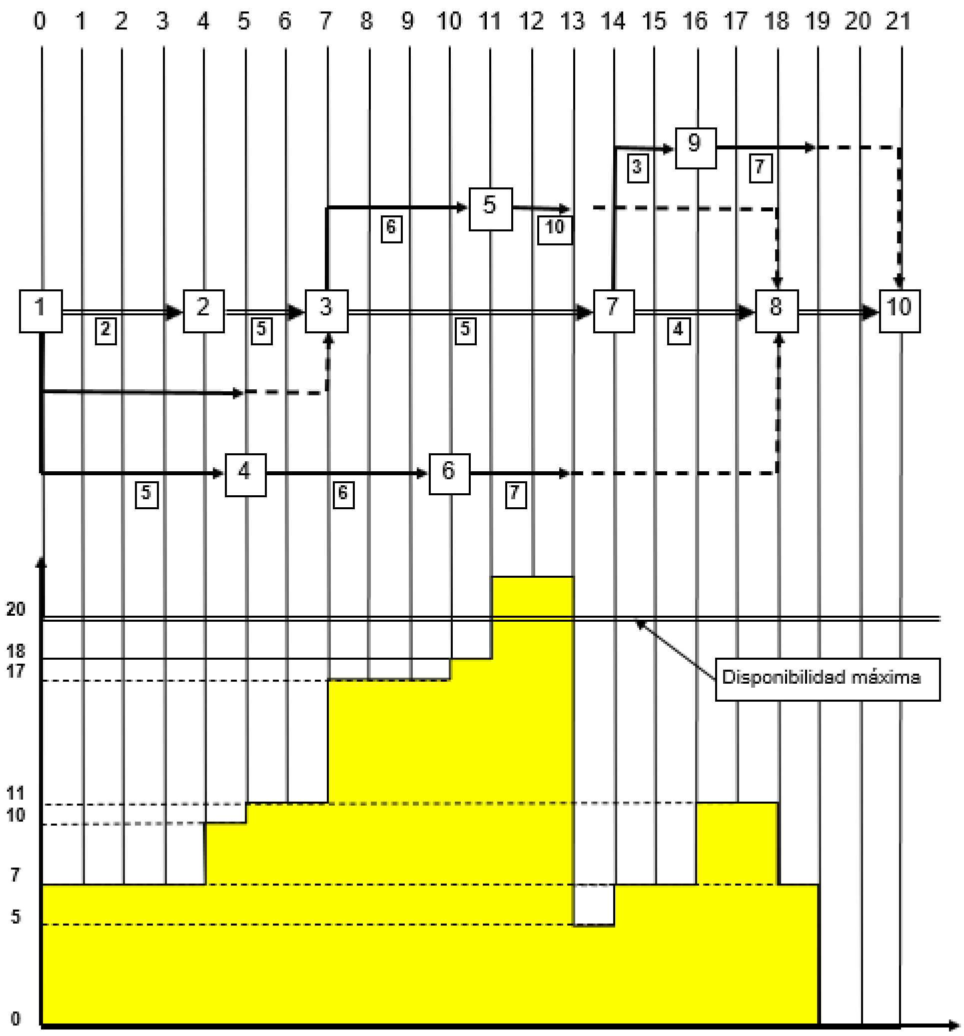
Muestra el margen, asumiendo que la tarea se inicia en la fecha temprana de inicio.
El margen de la actividad queda al final.

A fecha tardía



Permite visualizar cuánto más tarde se puede empezar una tarea, respecto de la fecha temprana de inicio.

Programación de recursos



Se diagrama el volumen de recursos necesarios en cada momento, debajo de los márgenes existentes en el diagrama calendario. Si en algún momento se excede del máximo disponible, se puede reprogramar la tarea para que se realice en algún momento en el que hay margen de tiempo y recurso en simultáneo.

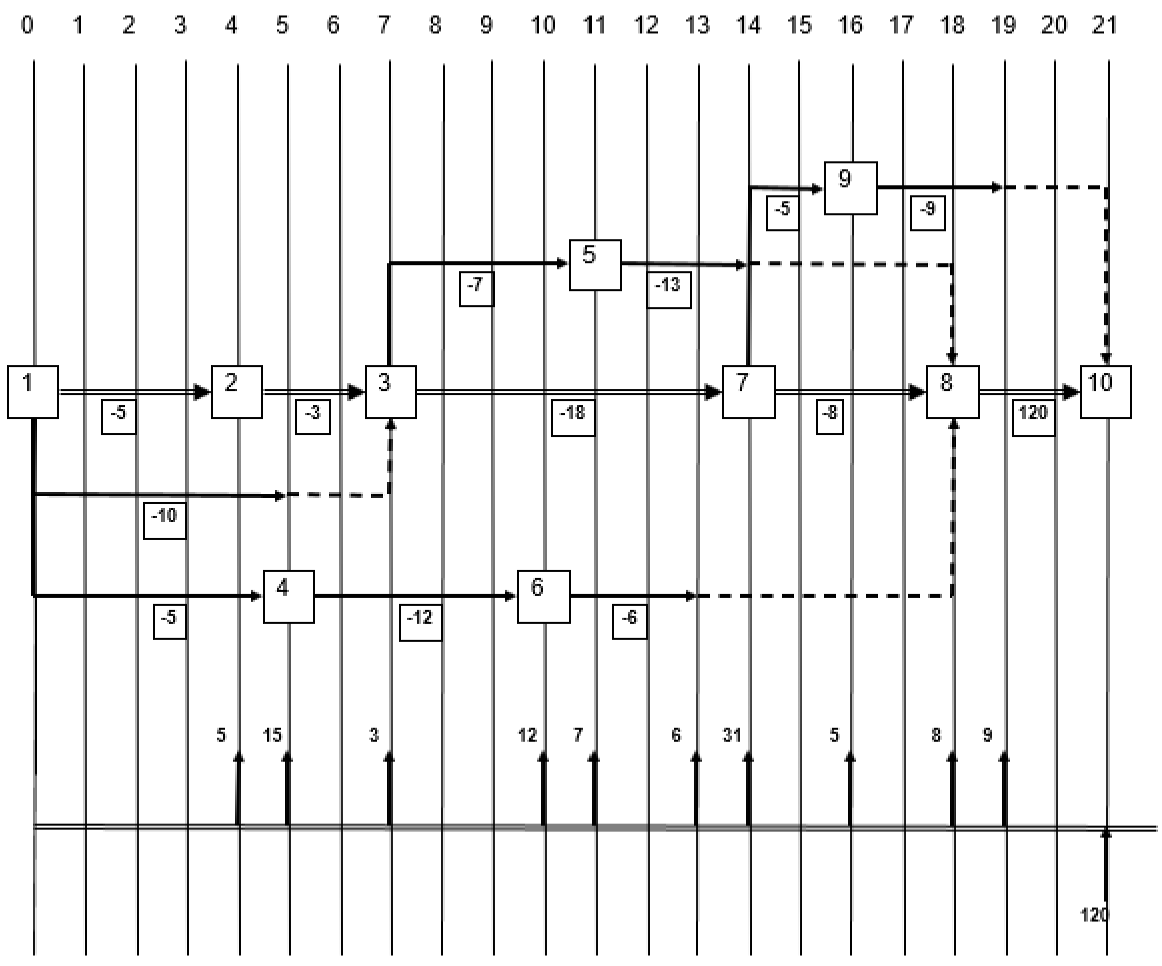
VAN y TIR

- VAN: Valor Actual Neto
- TIR: Tasa Interna de Retorno

Ambas fórmulas se relacionan de forma directa con el flujo de caja de los negocios y buscan hacer más preciso el cálculo del tiempo que un negocio tardará en recuperar su inversión inicial.

VAN tiene que ser mayor que 0 para que el negocio sea realmente rentable. Esto indicará que en un plazo estimado (por ejemplo, 5 años) podremos recuperar la inversión que ha puesto en marcha el negocio y tendremos más beneficio que si el dinero se hubiese invertido en renta fija.

TIR hace referencia al tipo de interés en el que el número de VAN es cero. Su función es señalar la tasa a la cual recuperaremos la inversión inicial de nuestro negocio transcurrido cierto tiempo**. Cuanto menor sea el TIR, más rentable será un proyecto.**



A FECHA TEMPRANA

$$VAN = -\frac{5}{(1+0{,}01)^4} - \frac{15}{(1+0{,}01)^5} - \frac{3}{(1+0{,}01)^7} - \frac{12}{(1+0{,}01)^{10}} - \frac{7}{(1+0{,}01)^{11}} - \frac{6}{(1+0{,}01)^{13}} - \frac{31}{(1+0{,}01)^{14}}$$
$$-\frac{5}{(1+0{,}01)^{16}} - \frac{8}{(1+0{,}01)^{18}} - \frac{9}{(1+0{,}01)^{19}} + \frac{120}{(1+0{,}01)^{21}} = 11{,}80$$

0.01 pareciera ser la tasa de interés mensual.
Para cada gasto, calcula su valor actual neto dividiéndolo por 1.01 ^ (cant. de meses que faltan para su erogación).
Cuando ingresa dinero al final, resta eso dividido por su tasa de interés correspondiente.

$$\frac{5}{(1+i)^4} + \frac{15}{(1+i)^5} + \frac{3}{(1+i)^7} + \frac{12}{(1+i)^{10}} + \frac{7}{(1+i)^{11}} + \frac{6}{(1+i)^{13}} + \frac{31}{(1+i)^{14}} + \frac{5}{(1+i)^{16}} + \frac{8}{(1+i)^{18}} + \frac{9}{(1+i)^{19}} = \frac{120}{(1+i)^{21}}$$

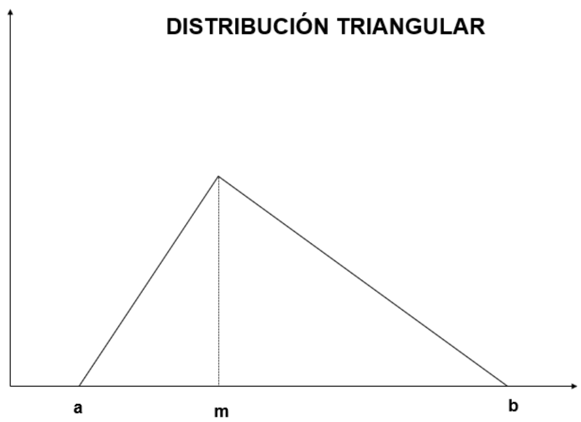
TIR = 3,27%.

Para la TIR, se igualan los gastos y los ingresos. Se busca saber cuál es la tasa de interés a la cual el proyecto empieza a ser más rentable que la renta financiera.

Tanto la VAN como la TIR son diferentes si se calculan para fecha temprana o tardía. El proyecto suele ser más rentable si se termina en fecha temprana.

PERT

Para la estimación de tiempos, se usa una distribución triangular donde a es el tiempo optimista, b el pesimista, y m el más probable:



El tiempo estimado de ejecución de una actividad y su desvío estándar se calculan:

TIEMPO ESTIMADO

$$\boxed{te = \frac{a + 4m + b}{6}}$$

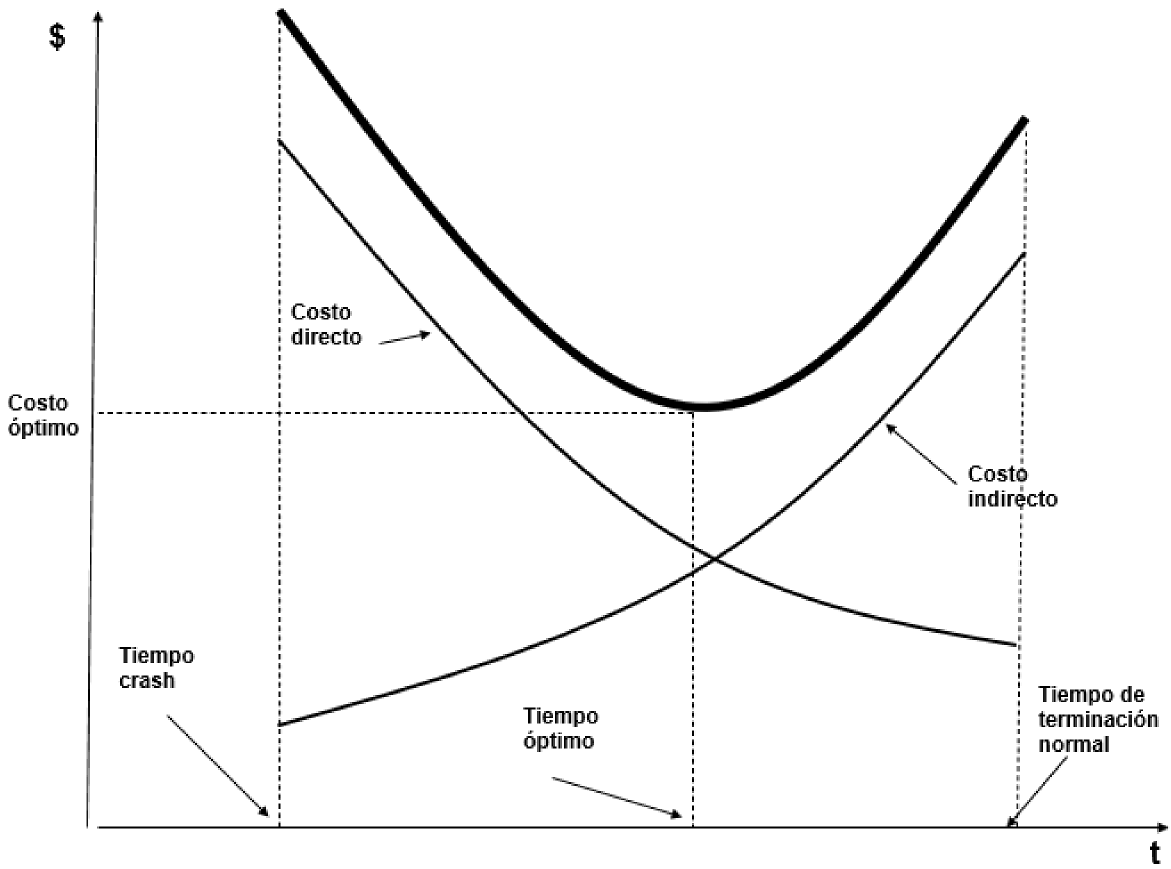
DESVIO ESTANDAR

$$\boxed{\sigma = \frac{b - a}{6}}$$

- La duración del proyecto es la suma de las tareas del camino crítico.
- La variancia es la suma de las variancias del camino crítico (si hay más de uno, la mayor).

Usando la tabla de distribución estándar normalizada, se puede calcular la probabilidad de que el proyecto, o una tarea, termine en x tiempo.

Aceleración de proyectos



Tiempos:

- Crash → tiempo mínimo que se puede tardar en una tarea.
- Normal → el esperado originalmente.
- Optimo → el tiempo en el que mis costos se minimizan (directo + indirecto)

Costos asociados:

- Directo: el costo que tiene acelerar la terminación de la tarea. Ej: empleado adicional, etc. Se pueden comparar cuando se los calcula por unidad de tiempo ahorrada.
- Indirecto: el costo en el que se incurre por tardar más (multas,

Cómo se acelera un proyecto:

1. Se seleccionan actividades críticas
2. De las críticas, se toma aquella cuyo aumento de costo por unidad de tiempo reducido sea menor
3. Se reduce hasta llegar al mínimo tecnológico o hasta que se modifique la criticidad.

4. Se itera, en base al nuevo diagrama de red (nuevas tareas críticas), hasta llegar al tiempo deseado o al tiempo mínimo